Über Begrenzungsflächen unendlich dünner Strahlenbündel, deren Erzeugende gleiche Neigung zum Mittelstrahl haben.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Hans Hage

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

Referent: **Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder.**

Korreferent: **K. Geh.-Rat Prof. Dr. Walther Ritter von Dyck.**

AMORBACH

Gottlob Volkhardt'sche Druckerei

1909.

Über Begrenzungsflächen unendlich dünner Strahlenbündel, deren Erzeugende gleiche Neigung zum Mittelstrahl haben.

Von der

K. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Hans Hage

Assistent an der K. Technischen Hochschule zu München.

Referent: Prof. Dr. Sebastian Finsterwalder.
Korreferent: K. Geh.-Rat Prof. Dr. Walther Ritter von Dyck.

AMORBACH
Gottlob Volkhardt'sche Druckerei
1909.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555418_0071

Über Begrenzungsflächen unendlich dünner Strahlenbündel, deren Erzeugende gleiche Neigung zum Mittelstrahl haben.

Einleitung.

E. E. Kummer nennt in seiner Arbeit über die geradlinigen Strahlensysteme[1]) die ∞^2 einem bestimmten Strahle des Systems unendlich benachbarten Strahlen ein unendlich dünnes Strahlenbündel. Als Begrenzungsfläche dieses Bündels betrachtet er die Regelfläche, welche von jenen ∞^1 Strahlen gebildet wird, die durch die ∞^1 Punkte einer um den Mittelstrahl gelegten unendlich kleinen, ganz beliebigen Kurve gehen. Die sämtlichen Erzeugenden der so entstehenden unendlich dünnen Regelfläche sind also ganz willkürlich herausgegriffene Nachbarstrahlen.

Natürlicher ist es wohl, eine Begrenzungsfläche zu wählen, die zusammengesetzt ist aus ∞^1 benachbarten Strahlen konstanter Neigung zum Mittelstrahl. Die sämtlichen Strahlen kleinerer Neigung liegen dann innerhalb dieser Fläche, jene größerer außerhalb derselben.

Herr K. Hensel hat in seiner Abhandlung »Theorie der unendlich dünnen Strahlenbündel«[2]) die wichtigsten Eigenschaften der allgemeinen Fläche gleicher Neigung angegeben. Für den Fall, daß Brenn- und Grenzpunkte zusammenrücken,

[1]) E. E. Kummer, Crelle's Journal Bd. 57, Seite 189.

[2]) K. Hensel, Crelle's Journal Bd. 102, Seite 273.

also für einen Strahl einer Normalenkongruenz, dann für den Fall, daß die Grenzpunkte in den Mittelpunkt des Strahles rücken, während die Brennpunkte imaginär sind, und für den Fall, daß Brenn- und Grenzpunkte in den Mittelpunkt fallen, finden sich dort auch die Gleichungen der entsprechenden Flächen konstanter Neigung.

In dieser Abhandlung sollen die Gleichungen dieser Flächen für den hyperbolischen, elliptischen und parabolischen Kongruenzstrahl aufgestellt und diskutiert werden. Sodann läßt sich eine einfache kinematische Erzeugung dieser Flächen angeben. Ferner sollen die Kurven, die von den Fußpunkten der senkrechten Abstände von Erzeugenden und Mittelstrahl auf der Fläche gebildet werden, wie auch die Einhüllenden der Projektionen der Erzeugenden auf Ebenen senkrecht zum Mittelstrahl untersucht und dargestellt werden.

Den Schluß der Arbeit bildet eine Untersuchung der Näherungskongruenz zweiter Ordnung und zweiter Klasse, die in zweiter Annäherung die Umgebung eines Strahles mit einem unendlich fernen Brennpunkt darstellt.

Die Anregung zu dieser Abhandlung erhielt ich von Herrn Professor Dr. S. Finsterwalder, dem ich hiefür, sowie für die wohlwollende Förderung während der Ausführung derselben zu aufrichtigem Danke verpflichtet bin.

A. Strahlen mit im Endlichen gelegenen Brennpunkten.

§ 1. Gleichungen der ersten Näherungskongruenz.

Das Gleichungssystem:

$$\frac{x-\mathfrak{x}}{f}=\frac{y-\mathfrak{y}}{g}=\frac{z-\mathfrak{z}}{h}$$

stellt eine Gerade dar. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ist ein bestimmter Punkt auf derselben und f, g, h sind Größen proportional den Richtungskosinus der Geraden. Verstehen wir unter $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, f, g und h Funktionen von 2 Parametern u und v, so stellen diese Gleichungen ein Strahlensystem vor. Alle auftretenden Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ erfüllen die sogenannte Ausgangsfläche der Kongruenz. Statt dieser führen wir nun die x y Ebene als Ausgangsfläche und statt der Parameter u, v die Koordinaten ξ, η der Schnittpunkte der Strahlen mit derselben als Parameter ein. Hiedurch erhalten wir folgende Gleichungen einer beliebigen Geradenkongruenz:

$$\frac{x-\xi}{\varphi(\xi\eta)}=\frac{y-\eta}{\psi(\xi\eta)}=\frac{z}{\chi(\xi\eta)}.$$

Um nun die Anordnung der einem beliebigen Kongruenzstrahle ∞^2 unendlich benachbarten Strahlen zu untersuchen, denken wir uns diesen Strahl in die z Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems verlegt und die Funktionen φ, ψ, χ nach Potenzen von ξ und η entwickelt, wodurch wir erhalten:

$$\frac{x-\xi}{\alpha\xi+\beta\eta+\gamma\xi^2+2\delta\xi\eta+\ldots}=\frac{y-\eta}{\alpha'\xi+\beta'\eta+\gamma'\xi^2+2\delta'\xi\eta+\ldots}$$

$$=\frac{z}{1+\alpha''\xi+\beta''\eta+\ldots}$$

Durch Multiplikation mit dem Nenner des dritten Ausdruckes und Entwicklung desselben nach dem binomischen Satze:

$$(1 + \alpha''\xi + \beta''\eta + \ldots)^{-1} = 1 - (\alpha''\xi + \beta''\eta) + \text{Glied. höh. Ordg.}$$

können die Gleichungen der Näherungskongruenz auf folgende Form gebracht werden:

$$1) \quad \frac{x - \xi}{a_1'\xi + b_1'\eta + \text{Gl. h. O.}} = \frac{y - \eta}{a_2'\xi + b_2'\eta + \text{Gl. h. O.}} = z.$$

Vernachlässigen wir nun im Nenner die Glieder zweiter und höherer Ordnung, so stellen die erhaltenen Gleichungen in erster Annäherung die Umgebung eines Kongruenzstrahles dar. Ziehen wir auch die Glieder zweiter Ordnung in Rechnung, so erhalten wir eine zweite Näherungskongruenz u. s. w.

Untersuchen wir nun die erste Näherungskongruenz mit den Gleichungen:

$$2) \quad \frac{x - \xi}{a_1'\xi + b_1'\eta} = \frac{y - \eta}{a_2'\xi + b_2'\eta} = z.$$

Schneiden wir diese durch eine Ebene $z = c$, so bestehen zwischen den Koordinaten des Durchstoßpunktes der Geraden der Kongruenz mit dieser und der x y Ebene folgende Beziehungen:

$$3) \quad \begin{aligned} x_2 &= (c\,a_1' + 1)\,x_1 + c\,b_1'\,y_1 = a_1\,x_1 + b_1\,y_1 \\ y_2 &= c\,a_2'\,x_1 + (c\,b_2' + 1)\,y_1 = a_2\,x_1 + b_2\,y_1. \end{aligned}$$

Dieselbe Beziehung zwischen den Koordinaten der Schnittpunkte würde sich für ein beliebiges, anderes Paar von parallelen Ebenen ergeben. Daher ersehen wir:

Die Gesamtheit der Strahlen eines unendlich dünnen Strahlenbündels, das jetzt zu einem den ganzen Raum erfüllenden Strahlensystem erweitert gedacht werden soll, ist in erster Näherung identisch mit den ∞^2 Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier paralleler, affin auf-

einander bezogener Ebenen. Dies hat schon Möbius[1]) gezeigt und zur Definition unendlich dünner Strahlenbündel benützt. Die beiden parallelen Ebenen werden dort als Grundebenen bezeichnet. Durch Einführung zweier inbezug auf den Kongruenzstrahl speziell liegender Ebenen als Grundebenen lassen sich die Gleichungen 2) in einfachere Form bringen.

Die Affinität zweier beliebiger Ebenen ist durch drei entsprechende Punktepaare bestimmt. Zwei parallelen, affin aufeinander bezogenen Ebenen können durch beliebige Parallelprojektion des einen Systems in das andere zwei in einer Ebene liegende affine Systeme zugeordnet werden, die immer einen sich selbst entsprechenden Punkt (Doppelpunkt) haben.[2]) Durch diesen gehen zwei sich selbst entsprechende Gerade, die auch zusammenfallen oder imaginär sein können. Dem Doppelpunkt entsprechen in den beiden Grundebenen zwei Punkte und die Verbindungslinie derselben ist parallel zur erwähnten Projektionsrichtung. Die durch Verbindung sämtlicher ∞^2 Punkte der einen Ebene mit den entsprechenden der andern entstehende Geradenkongruenz ist aber vollständig unabhängig von dieser beliebig gewählten Projektionsrichtung, zu der immer ein Strahl der Kongruenz parallel ist. Folglich ist von den ∞^2 Verbindungsgeraden der sich affin entsprechenden Punkte der beiden Grundebenen immer gerade eine senkrecht zu den Grundebenen. Diese Eigenschaften paralleler, affiner Ebenen werden uns zu einer übersichtlichen Darstellung der ersten Näherungskongruenzen führen.

Durch die Formeln 3) wird jedem Punkt $x_1\, y_1$ ein Punkt $x_2\, y_2$ derselben Ebene zugeordnet. Denkt man sich durch diesen parallel zur z Achse eine Gerade gezogen, so schneidet

---

[1]) Möbius, Geom. Entwicklung der Eigensch. unendl. dünner Strahlenbündel, 13. Bd. der Berichte über die Verhdlg. der K.S.Ges. der Wiss. Math. Phys. Kl.

[2]) P. Zech, Die Geom. unendl. dünner Strahlenbündel und die Affinität ebener Systeme, Schlöhmilch's Zeitschrift für Math. u. Phys., 17. Jhrg., Seite 353.

diese die im Abstande $z = c$ parallel zur $x_1\ y_1$ Ebene verlaufende Ebene in dem dem Punkte $x_1\ y_1$ der ersten Grundebene entsprechenden Punkte $x_2\ y_2$ der zweiten Grundebene. Der sich selbst entsprechende Punkt der x y Ebene ist der Koordinatenanfangspunkt; das Parallelstrahlenbündel, durch welches die ineinander liegenden affinen Systeme erhalten wurden, ist parallel zu der im allgemeinen mit der x y Ebene einen spitzen Winkel bildenden z Achse.

In den weiteren Entwicklungen wollen wir uns zur Vereinfachung der Rechnungen die x Achse senkrecht zur y Achse denken, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit der durch die Gleichungen 3) vermittelten affinen Beziehung zwischen den Grundebenen möglich ist. Doch soll die z Achse auch fernerhin nicht senkrecht zur x y Ebene angenommen werden.

Jeder Geraden durch den sich selbst entsprechenden Punkt entspricht wieder eine Gerade durch denselben, sodaß, wie aus 3) zu ersehen, die Gerade $y_2 = m\,x_2$ übergeht in:

$$y_1 = \frac{m\,a_1 - a_2}{b_2 - m\,b_1} \cdot x_1.$$

Die 2 Geraden, deren Richtungsfaktoren die Lösungen der in m quadratischen Gleichung

$$m^2 + m \cdot \frac{a_1 - b_2}{b_1} - \frac{a_2}{b_1} = 0$$

sind, fallen mit ihren entsprechenden zusammen. Es sind dies die Doppelgeraden der dem sich selbst entsprechenden Punkt durch die affine Beziehung zugeordneten projektiven Geradenbüschel, die je nach Vorzeichen und Größe der Konstanten a_1, a_2, b_1, b_2 reell oder imaginär sind. Führt man mithin statt der obigen rechtwinkligen Koordinatenachsen die Winkelhalbierenden der Doppelgeraden als Achsen ein, so gehen die Gleichungen 3) über in:

4)
$$\begin{aligned} x_2 &= a_1\,x_1 + b_1\,y_1 \\ y_2 &= a_2\,x_1 + a_1\,y_1; \end{aligned}$$

denn in diesem Falle muß die Gleichung für m rein quadratisch, also $a_1 = b_2$ sein. Der Richtungsfaktor der Doppelgeraden wird dann:

$$m = \pm \sqrt{\frac{a_2}{b_1}}.$$

Durch diese Formeln 4) ist analytisch die allgemeinste, nicht ausartende affine Beziehung zweier ineinander liegender Ebenen festgelegt, nur sind die Koordinatenachsen speziell gewählt inbezug auf die vorkommenden Doppelelemente.

Die Gleichungen der ∞^2 Verbindungsgeraden affin entsprechender Punkte inbezug auf dieses neue Koordinatensystem wird somit für $x_1\ y_1$ als Parameter:

$$5) \qquad \frac{x - x_1}{(a_1 - 1)\,x_1 + b_1\,y_1} = \frac{y - y_1}{(a_1 - 1)\,y_1 + a_2\,x_1} = \frac{z}{c}.$$

c bedeutet die Entfernung der Schnittpunkte der beiden Grundebenen mit der z Achse. Diese Gleichungen stellen bei entsprechender Wahl der Konstanten dieselbe Geradenkongruenz dar, wie die Gleichungen *2*).

Führen wir nun statt der bis jetzt ganz beliebig gewählten Grundebene $x_2\ y_2$ eine zu ihr parallele, aber inbezug auf die Geradenkongruenz speziell liegende ein, so werden die Formeln 5) bedeutend einfacher. Die Koordinaten der Schnittpunkte eines Kongruenzstrahles mit einer den Grundebenen parallelen Ebene $z = \lambda$ berechnen sich zu:

$$6) \qquad \begin{aligned} \xi &= \left(1 + \lambda\,\frac{a_1 - 1}{c}\right) x_1 + \lambda \cdot \frac{b_1}{c}\, y_1 \\ \eta &= \frac{\lambda}{c}\, a_2\, x_1 + \left(1 + \lambda\,\frac{a_1 - 1}{c}\right) y_1. \end{aligned}$$

Durch Auflösung nach $x_1\ y_1$ folgt:

$$7) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{c}(a_1 - 1)\right)^2 - \frac{a_2\,b_1}{c^2}\lambda^2}\left[\left(1 + \frac{\lambda\,(a_1 - 1)}{c}\right)\xi - \frac{b_1\,\lambda}{c}\,\eta\right] \\ y_1 &= \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{c}(a_1 - 1)\right)^2 - \frac{a_2\,b_1}{c^2}\lambda^2}\left[-\frac{a_2\,\lambda}{c}\,\xi + \left(1 + \frac{\lambda\,(a_1 - 1)}{c}\right)\eta\right], \end{aligned}$$

mithin wieder Gleichungen der Form 4). Je nach Wahl von λ erhält man verschiedene Werte der auftretenden konstanten Koeffizienten. Um nun die Formeln 5) möglichst zu vereinfachen, bestimmen wir λ so, daß der Koeffizient von ξ in der ersten der Formeln 7) und mithin auch jener von η in der zweiten zur Einheit wird. Mithin:

$$\lambda\left[\frac{a_1 - 1}{c} + \lambda\left(\frac{a_1 - 1}{c}\right)^2 - \frac{a_2 b_1}{c_2}\lambda\right] = 0$$

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_2 = \frac{c(1 - a_1)}{(a_1 - 1)^2 - a_2 b_1}.$$

Für $\lambda_1 = 0$ würden die beiden das Strahlenbündel bestimmenden Ebenen zusammenfallen. Für λ_2 werden die Gleichungen 7):

8)
$$x_1 = \xi + \frac{1 - a_1}{a_2}\eta$$
$$y_1 = \frac{1 - a_1}{b_1}\xi + \eta.$$

Bestimmt man nun das Strahlenbündel durch diese speziell gewählte Ebene $\xi\,\eta$ und die $x_1\,y_1$ Ebene, so werden dessen Gleichungen:

$$\frac{x - \xi}{\frac{1 - a_1}{a_2}\cdot\eta} = \frac{y - \eta}{\frac{1 - a_1}{b_1}\cdot\xi} = \frac{z - \lambda_2}{\lambda_2}.$$

Verschiebt man das Koordinatensystem noch um λ_2 in der z Richtung, wobei also die $\xi\,\eta$ Ebene die x y Ebene wird, und setzt man:

$$\frac{a_2\lambda_2}{1 - a_1} = a \text{ und } \frac{b_1\lambda_2}{1 - a_1} = b,$$

so erhält man:

9)
$$\frac{x - \xi}{\frac{\eta}{a}} = \frac{y - \eta}{\frac{\xi}{b}} = z.$$

Dies ist die einfachste Form der Gleichungen der ersten Näherungskongruenz des einem beliebigen Kongruenzstrahle zugeordneten unendlich dünnen Strahlenbündels. Die z Achse des verwendeten Koordinatensystems braucht nicht senkrecht zur x y Ebene angenommen zu werden. Doch bildet die x Achse einen rechten Winkel mit der y Achse. ξ und η sind die Parameter, a und b Konstante.

§ 2. Gleichung der Fläche konstanter Neigung.

Aus den Gleichungen 9) folgt nun:

9a)
$$\xi = \frac{a\,b\,x - b\,y\,z}{a\,b - z^2}$$
$$\eta = \frac{a\,b\,y - a\,x\,z}{a\,b - z^2}.$$

Irgend eine Beziehung zwischen η und ξ faßt aus den ∞^2 Strahlen ∞^1 Gerade zu einer Regelfläche zusammen. So liefert $\eta = m\,\xi$ die Schar von Flächen zweiten Grades (hyperbolische Paraboloide), in welche sich die ∞^2 Strahlen anordnen lassen, nämlich:

9b) $$m\,(a\,b\,x - b\,y\,z) - a\,b\,y + a\,x\,z = 0.$$

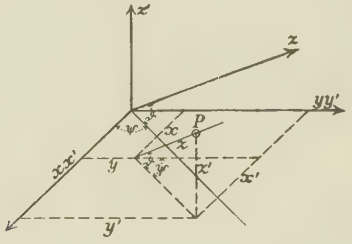
Wir wählen nun die Beziehung zwischen η und ξ so, daß die Erzeugenden der entstehenden Regelflächen alle gleiche Neigung gegen den Mittelstrahl haben.

Um die Winkel eines Strahles $\xi\,\eta$ der Gleichung 8) mit dem in die z Achse verlegten Mittelstrahl zu erhalten, führen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, dessen x' y' Ebene mit der x y Ebene des in den Gleichungen 8) verwendeten Koordinatensystems zusammenfällt. Bezeichnen wir mit ϑ den Winkel der z Achse mit der x y Ebene

und mit ψ den Winkel der senkrechten Projektion der z Achse in die x y Ebene mit der x Achse, so bestehen folgende Beziehungen:

$$x = x' - \cos\psi \operatorname{cotg}\vartheta \cdot z'$$
$$y = y' - \sin\psi \operatorname{cotg}\vartheta \cdot z'$$
$$z = \frac{z'}{\sin\vartheta}.$$

Beziehen wir die Gleichungen 9) auf dieses Koordinatensystem,



so gehen sie über in:

$$\frac{x' - \xi}{\frac{\eta}{a\sin\vartheta} + \cos\psi \operatorname{cotg}\vartheta} = \frac{y' - \eta}{\frac{\xi}{b\sin\vartheta} + \sin\psi \operatorname{cotg}\vartheta} = z'.$$

Daher ergibt sich für die Richtungskosinus eines Strahles $\xi\,\eta$:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\frac{\eta}{a} + \cos\psi \cdot \cos\vartheta}{\sqrt{\left(\frac{\eta}{a} + \cos\psi\cos\vartheta\right)^2 + \left(\frac{\xi}{b} + \sin\psi\cos\vartheta\right)^2 + \sin^2\vartheta}}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{\frac{\xi}{b} + \sin\psi \cdot \cos\vartheta}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad\qquad}}$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\qquad\qquad\qquad\qquad}}.$$

Die Winkel der z Achse mit der z' Achse berechnen sich aus:

$$\cos \alpha_2 = \cos \vartheta \cdot \cos \psi$$
$$\cos \beta_2 = \cos \vartheta \cdot \sin \psi$$
$$\cos \gamma_2 = \sin \vartheta.$$

Aus diesen Richtungskosinus des Strahles $\xi\eta$ und jenen der z Achse, berechnet sich der Winkel ν des Strahles mit der z Achse nach der Formel:

$$\operatorname{tg}^2 \nu = \frac{(\cos\beta_1 \cos\gamma_2 - \cos\gamma_1 \cos\beta_2)^2 + (\cos\gamma_1 \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \cos\gamma_2)^2 + (\cos\alpha_1 \cos\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\alpha_2)^2}{(\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2)^2}.$$

Somit erhalten wir als Gleichung der Schnittkurve der Fläche konstanter Neigung mit der x y Ebene die Gleichung:

$$10^{a)} \quad \left(\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{a^2}\right) \cdot \sin^2 \vartheta + \left(\frac{\xi}{b} \cos \psi - \frac{\eta}{a} \sin \psi\right) \cdot \cos^2 \vartheta = \left(\frac{\eta}{a} \cos \vartheta \cos \psi + \frac{\xi}{b} \cos \vartheta \sin \psi + 1\right)^2 \operatorname{tg}^2 \nu.$$

Da wir nur der z Achse unendlich benachbarte Strahlen betrachten wollen, sind ξ, η und $\operatorname{tg} \nu$ als unendlich kleine Größen derselben Ordnung anzusehen. Demnach können in der Gleichung 10a) die Größen $\xi \operatorname{tg}^2 \nu$, $\eta \operatorname{tg}^2 \nu$, $\xi^2 \operatorname{tg}^2 \nu$, $\xi\eta \operatorname{tg}^2 \nu$ und $\eta^2 \operatorname{tg}^2 \nu$ gegen die Größen ξ^2, $\xi\eta$, η^2 und $\operatorname{tg}^2 \nu$ vernachlässigt werden. Damit geht diese Gleichung über in:

$$10^{b)} \quad \left(\frac{\xi^2}{b^2} + \frac{\eta^2}{a^2}\right) \sin^2 \vartheta + \left(\frac{\xi}{b} \cos \psi - \frac{\eta}{a} \sin \psi\right) \cos^2 \vartheta = \operatorname{tg}^2 \nu.$$

Setzen wir statt ξ und η die Werte aus den Formeln 9a) ein, so erhalten wir die Gleichung der Fläche konstanter Neigung, bezogen auf das schiefwinklige Koordinatensystem x y z, in der Form:

$$11^{a)} \quad \left[(a\,x - y\,z)^2 + (b\,y - x\,z)^2\right] \sin^2 \vartheta + \left[(a\,x - y\,z) \cos \psi - (b\,y - x\,z) \sin \psi\right] \cos^2 \vartheta = (a\,b - z^2)^2 \operatorname{tg}^2 \nu.$$

Setzen wir voraus, daß der betrachtete Kongruenzstrahl auf der x y Ebene senkrecht steht, also $\vartheta = 90^0$ ist, so gehen die Gleichungen 10a) und 10b) über in:

10c) $$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 = a^2 b^2 \operatorname{tg}^2 \nu.$$

Die Gleichung 11a) der Fläche konstanter Neigung wird dann:

11b) $$x^2 (a^2 + z^2) - 2 x y z (a + b) + y^2 (b^2 + z^2) = (a b - z^2)^2 \operatorname{tg}^2 \nu.$$

Die so erhaltenen Gleichungen 11a) und 11b) sind die Gleichungen der Flächen, die von den einem Kongruenzstrahle unendlich benachbarten Strahlen gleicher Neigung gebildet werden. Somit lassen sich die ∞^2 Erzeugenden des einem Kongruenzstrahle zugeordneten unendlich dünnen Strahlenbündels in Scharen von Linienflächen vierter Ordnung, deren Erzeugende gleiche Neigung zum Mittelstrahl haben, anordnen.

§ 3. Diskussion der Fläche konstanter Neigung.

Aus der Gleichung 11a) der allgemeinsten Fläche konstanter Neigung ist zu ersehen, daß Ebenen parallel der x y Ebene diese Fläche nach Ellipsen schneiden. Diese zerfallen für die Schnitte im Abstande $z = \pm \sqrt{a b}$ in das Geradenpaar:

$$\left(y \pm \sqrt{\frac{a}{b}} \cdot x \right)^2 = 0.$$

Da die Größe ν in dieser Gleichung fehlt, werden diese Geraden von allen Kongruenzstrahlen getroffen. Die im Falle $\vartheta = 90^0$ als Schnitte auftretenden Geraden, die senkrecht zum Mittelstrahl stehen, wurden von Kummer[1]) die

[1]) Kummer a. a. O. Seite 222.

Brennlinien, ihre Schnitte mit dem Mittelstrahl die Brennpunkte und die durch diese Geraden und den Mittelstrahl bestimmten Ebenen die Brennebenen genannt.

Schneiden wir nun die Fläche 11a) durch eine beliebige Ebene:

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

Die Projektion der Schnittkurve in die x y Ebene wird, wie durch Einsetzen in die Gleichung 11a) zu ersehen ist, eine Kurve vierter Ordnung; werden jedoch x und y als unendlich kleine Größen derselben Ordnung betrachtet, so können die in der Gleichung der Kurve auftretenden Glieder dritter und vierter Ordnung in x und y gegen die Glieder zweiter Ordnung vernachlässigt werden, womit als Projektion der Schnittkurve eine Kurve zweiter Ordnung erhalten wird. Die Gleichung derselben folgt aus Gleichung 11a), wenn z durch γ ersetzt wird; sie ändert sich nicht, welche Werte auch α und β in der Gleichung der Ebene annehmen mögen. Daher schneiden alle Ebenen, die durch denselben Punkt des Mittelstrahles gehen, die unendlich dünnen Flächen konstanter Neigung nach Ellipsen, deren Projektionen in die x y Ebene zusammenfallen. Diese Ellipsen sind daher die ebenen Schnitte des über dieser Projektion errichteten Zylinders, dessen Erzeugende der z Achse parallel sind. Alle diese Schnitte sind somit zu einander affin. Dies hat bereits Herr K. Hensel[1]) geometrisch bewiesen und so folgende Verallgemeinerung des von Weingarten[2]) nur für Normalensysteme aufgestellten Satzes erhalten:

Jede der ∞^1 durch den ersten Brennpunkt gehenden und in der zweiten Brennebene liegenden Geraden kann als Brennlinie der ersten Näherungskongruenz betrachtet werden.[3])

[1]) Hensel a. a. O. Seite 301.

[2]) Weingarten, Crelle's Journal Bd. 98.

[3]) Vergl. Berwald, Diss. der U. München: § 10. Zur Geschichte des Sturm'schen Satzes.

Als affines Bild der unendlich dünnen Fläche konstanter Neigung können wir daher sowohl die Fläche 11a) als auch 11b) betrachten. Die diesen verschiedenen Flächen entsprechenden unendlich dünnen Flächen konstanter Neigung weichen jedoch nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung von einander ab. Daher erscheint in Folgendem eine weitere Diskussion der allgemeinsten Fläche konstanter Neigung 11a) überflüssig.

Die ausführliche Untersuchung der Fläche 11b), die sich für senkrecht zur x y Ebene verlaufende Kongruenzstrahlen ergeben hat, wird uns schon ein anschauliches Bild über die auftretenden Flächen konstanter Neigung liefern. In Folgendem befassen wir uns daher nur mit dem speziellen Falle, daß $\vartheta = 90^0$ ist. Der Gleichung 11b) liegt somit ein rechtwinkliges Koordinatensystem x y z zu Grunde.

Wir erkennen aus der Gleichung der Fläche, daß alle Ebenen parallel der x y Ebene die Fläche konstanter Neigung nach Ellipsen schneiden. Die Längen der Achsen eines Schnittes im Abstande z berechnen sich zu:

12)
$$\alpha = \operatorname{tg} \nu \left(\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + z^2} + \frac{a+b}{2} \right)$$
$$\beta = \operatorname{tg} \nu \left(\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + z^2} - \frac{a-b}{2} \right),$$

während der Winkel φ derselben mit der x Achse sich ergibt zu:

13)
$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2z}{b-a}.$$

Die Schnitte der Fläche mit den Ebenen $\pm z$ sind kongruente Ellipsen, die inbezug auf die Achsen des Koordinatensystems symetrische Lage haben. Die Achsen des Schnittes $z = 0$ fallen mit der x und y Achse zusammen, während die Achsen der Schnitte $z = \pm \infty$ in den Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen liegen.

Die Schnitte mit den Ebenen:

13a) $$z = \pm \sqrt{a\,b}$$

arten in zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre gerade Linien von der Länge $(a + b)\,tg\,\nu$ aus. Die Gleichung der Projektion derselben in die x y Ebene ergibt sich aus 11b) zu:

$$\left(y \pm \sqrt{\frac{a}{b}}\,x\right)^2 = 0;$$

ihre Lage ist also bestimmt durch:

13b) $$tg\,2\varphi = \frac{\pm 2\sqrt{a\,b}}{b - a} \quad \text{oder} \quad tg\,\varphi = \pm \sqrt{\frac{a}{b}},$$

so daß für den Winkel, den die Projektionen auf die x y Ebene einschließen, folgt:

$$\cos \Phi = \pm \frac{a - b}{a + b}.$$

Diese Doppelgeraden der Fläche konstanter Neigung sind reell, wenn a und b gleiches Vorzeichen, imaginär, wenn sie entgegengesetztes Vorzeichen haben. Sie fallen in eine einzige Gerade zusammen, wenn a oder b zu Null wird. Da die Lage dieser Doppelgeraden nicht von ν abhängt, ergibt sich, daß alle ∞^2 Geraden der Kongruenz 9), die durch Gleichung 11) in eine Schar von Flächen zusammengefaßt sind, die beiden reellen, imaginären oder zusammenfallenden Geraden schneiden.

Durch Subtraktion erhält man aus 12):

$$\alpha - \beta = tg\,\nu\,(a + b).$$

Also ist die Achsendifferenz der zur x y Ebene parallelen Schnittellipsen einer Fläche gleicher Neigung konstant, und da die Projektionen auf die x y Ebene aller dieser Ellipsen denselben Mittelpunkt haben, gehören sie der Ellipsenschar an, die bei der elliptischen Bewegung[1]) erzeugt wird, also

[1]) Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Seite 36.

bei einer Bewegung zweier Ebenen ineinander, hervorgerufen durch Rollen eines Kreises vom Radius r (in unserm Falle ist $r = \frac{a + b}{2} \operatorname{tg} \nu$), in einem Kreise vom Radius $2\,r$. Bei dieser Bewegung beschreibt jeder Punkt der rollenden Ebene eine Ellipse in der festen Ebene und alle diese ∞^2 so erzeugten Ellipsen haben konstante Achsendifferenz. Die Projektion der bei einer Fläche gleicher Neigung auftretenden Ellipsenschar besteht aus den ∞^1 Ellipsen, die bei obiger Bewegung durch die Punkte einer bestimmten Geraden der beweglichen Ebene in der festen Ebene erzeugt werden. Je nachdem diese Gerade den Kreis vom Radius r schneidet, berührt oder außerhalb desselben verläuft, enthält diese Ellipsenschar zwei reelle, zusammenfallende oder imaginäre, durch den Mittelpunkt des festen Kreises gehende gerade Linien. Diese Geraden treten bei der Fläche konstanter Neigung auf als die Projektionen auf die x y Ebene der zwei reellen, zusammenfallenden oder imaginären Doppelgeraden der Fläche. Denkt man sich statt der aufeinander rollenden Kreise zwei aufeinander rollende Zylinder, deren Schnitte senkrecht zu den Erzeugenden derselben die rollenden Kreise sind, so werden bei dieser Bewegung durch eine mit dem rollenden Zylinder fest verbunden gedachte Gerade die Flächen konstanter Neigung erzeugt und zwar jene mit zwei reellen Doppelgeraden, wenn die Gerade den rollenden Zylinder in zwei reellen Punkten schneidet, jene mit zusammenfallenden, wenn sie ihn berührt und jene mit imaginären, wenn sie außerhalb desselben verläuft. Die auf diese Weise erzeugten Flächen sind von Herrn Prof. Burmester Wringflächen genannt worden.[1])

Aus den Formeln 12) und 13) ist ferner zu ersehen: Jeder horizontale Schnitt mit der Schar der Flächen konstanter Neigung eines bestimmten Kongruenzstrahles besteht

[1]) Burmester, Kinem. Flächenerzeugung vermittels zylindrischer Rollung, Zeitschr. für Math. u. Phys. Bd. 33, 6.

aus einer Schar ähnlicher, konzentrischer Ellipsen mit gemeinsamer Achsenrichtung.

---

§ 4. Gleichung der von den Fußpunkten der kürzesten Abstände von Mittelstrahl und Erzeugenden der Fläche gebildeten Kurven.

Durch Elimination von z aus den Gleichungen 9) erhalten wir die Gleichung der ∞^2 Projektionen auf die x y Ebene der Strahlen der Kongruenz 9) in der Form:

$$a\,\xi \cdot x - b\,\eta \cdot y + b\,\eta^2 - a\,\xi^2 = 0.$$

Also folgt für die Länge des Abstandes ρ, sowie für den Winkel φ desselben mit der x Achse:

$$\rho = \frac{a\,\xi^2 - b\,\eta^2}{\sqrt{a^2\,\xi^2 + b^2\,\eta^2}};$$

$$\cos\varphi = \frac{a\,\xi}{\sqrt{a^2\,\xi^2 + b^2\,\eta^2}};\quad \sin\varphi = \frac{-b\,\eta}{\sqrt{a^2\,\xi^2 + b^2\,\eta^2}}.$$

Ersetzen wir in dem Ausdruck für ρ die Parameter ξ und η durch die sich aus den Ausdrücken für φ und aus den Formeln 10b) für diese Parameter ergebenden Werte in φ und ν, so erhalten wir die Polargleichung der Projektion auf die x y Ebene der von den Fußpunkten der senkrechten Abstände von Mittelstrahl und Erzeugenden der Fläche konstanter Neigung gebildeten Kurve in der Form:

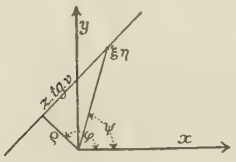
$$14) \qquad \rho = \frac{t\,g\,\nu}{2}\Big[(a + b)\cos 2\,\varphi - (a - b)\Big]\ ^{1}).$$

Die z Koordinate der Fußpunkte, also die sogenannte Abscisse des senkrechten Abstandes berechnet sich aus einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete der Abstand ρ und dessen andere Kathete die Projektion des Stückes des

---

[1]) Hensel a. a. O. Seite 290.

Kongruenzstrahles von der x y Ebene bis zum Fußpunkt des Abstandes, also $z \cdot tg\,\nu$ ist, wie folgt:



$$tg\,(\varphi - \psi) = \frac{z \cdot tg\,\nu}{\rho},$$

$$tg\,\varphi = -\frac{b\,\eta}{a\,\xi},\ tg\,\psi = \frac{\eta}{\xi}.$$

Mithin:

15) $$z = \frac{a + b}{2} \sin 2\,\varphi.$$

Daher wird die Parametergleichung der Fußpunktenkurve:

$$x = \rho \cos\varphi = tg\,\nu \left(\frac{a + b}{2} \cos 2\,\varphi - \frac{a - b}{2}\right) \cos\varphi$$

16) $$y = \rho \sin\varphi = tg\,\nu \left(\frac{a + b}{2} \cos 2\,\varphi - \frac{a - b}{2}\right) \sin\varphi$$

$$z = \frac{a + b}{2} \sin 2\,\varphi.$$

In Gleichung 15) kommt ν nicht vor; daher ist die Abscisse für die ∞^1 Strahlen, deren Projektionen auf die x y Ebene parallel sind, konstant.[1]) Die entsprechenden ∞^1 Strahlen der Kongruenz 9) bilden die Fläche 9b).

Die Gleichung der von den Abständen gebildeten Regelfläche wird erhalten durch Elimination von φ aus 15) und $tg\,\varphi = \frac{y}{x}$ als: $(x^2 + y^2)\,z - (a + b)\,x\,y = 0.$

Dies ist die Gleichung des Zylindroids. Die räumliche Fußpunktenkurve ist der Schnitt desselben mit dem über der Kurve 14) errichteten senkrechten Zylinder. Alle Fußpunktenkurven, die bei konstantem Werte von $a + b$ für die verschiedenen Werte ν erhalten werden, liegen auf dieser Fläche, da ν in der Gleichung derselben fehlt.

---

[1]) Möbius a. a. O. Seite 12.

§ 5. Zusammenfassung.

Die Geradenkongruenz 9), deren Strahlen wir in Vorhergehendem zu einer Schar von Regelflächen konstanter Neigung zusammengefasst haben, stellte uns in erster Näherung den Verlauf der einem beliebigen Kongruenzstrahle unendlich benachbarten Strahlen dar. Die beiden reellen, zusammenfallenden oder imaginären Doppelgeraden, die sich für die endlich gedachte Fläche 11 b) ergaben, sind, wenn ν als unendlich kleine Größe aufgefaßt wird, unendlich kleine gerade Linien senkrecht zum Mittelstrahl, welche Kummer, wie bereits erwähnt, als Brennlinien des Strahles bezeichnet hat. Die Schnittpunkte derselben mit dem Mittelstrahl, also die Punkte $z = \pm \sqrt{a\,b}$, sind die Brennpunkte. Sind diese reell, so gehen durch jeden zwei Nachbarstrahlen bestimmter Neigung ν, die mit dem Mittelstrahl die Brennebene bilden.

Die Gleichung 15) liefert die beiden als Grenzpunkte des Kongruenzstrahles bezeichneten Extremwerte $z_{1,2} = \pm \frac{a + b}{2}$, die immer reell sind. Die diesen Werten entsprechenden Abstände selbst liegen in den die Winkel der x z und y z Ebene halbierenden Ebenen, die von Kummer in oben bezeichneter Abhandlung Hauptebenen genannt wurden. Die sich ergebende symetrische Lage der Brenn- und Grenzpunkte inbezug auf die x y Ebene wurde erreicht durch das früher Gesagte über die Wahl der einen das unendlich dünne Bündel bestimmenden Grundebene als spezielle Ebene. Diese Ebene, die wir in die x y Ebene verlegten, heißt die Mittelebene und ihr Schnitt mit dem Mittelstrahl der Mittelpunkt des Kongruenzstrahles.

§ 6. Spezielle Lagen der Grenz- und Brennpunkte.[1])

a) Für $a = b$ geht die Gleichung 11b) über in:

$$x^2(a^2 + z^2) - 4axyz + y^2(a^2 + z^2) = tg^2\nu(a^2 - z^2)^2.$$

In diesem Falle stehen, wie aus den Formeln 13) zu ersehen ist, die beiden Brennebenen auf einander senkrecht. Die Brennpunkte fallen mit den Grenzpunkten im Punkte $z = \pm a$ zusammen; desgleichen sind auch Brennebenen und Hauptebenen identisch. Das unendlich dünne Bündel ist jetzt Element des Normalensystems der Eläche $z = \frac{xy}{a}$, denn die Gleichungen der der z Achse unendlich benachbarten Normalen dieser Fläche lassen sich in der Form schreiben:

$$\frac{x - \xi}{\frac{\eta}{a}} = \frac{y - \eta}{\frac{\xi}{a}} = z.$$

Die Ellipsenachsen der sämtlichen zur x y Ebene parallelen Schnitte liegen in den Hauptebenen, ihre Größen sind für den Schnitt im Abstande z:[2])

$$\alpha = z + a; \quad \beta = z - a.$$

Der Schnitt der Fläche gleicher Neigung mit der x y Ebene wird also ein Kreis vom Radius a. (Figur 1).

Um die den möglichen Lagen der Brenn- und Grenzpunkte entsprechenden Fußpunktskurven zu erhalten, können wir in Gleichung 14) $tg\,\nu = 1$ wählen, denn die Kurven

[1]) Für die bei hyperbolischen Strahlen mit schiefen und senkrechten Brennlinien, sowie die bei elliptischen und parabolischen Strahlen auftretenden Flächen konstanter Neigung hat Verfasser Fadenmodelle angefertigt, in welchen auch die entsprechenden Fußpunktskurven dargestellt sind. (Modells. des Math. Instituts der Techn. Hochschule München).

[2]) Hensel a. a. O. Seite 301.

für beliebige Werte von ν werden aus diesen durch proportionale Vergrößerung der sämtlichen Radienvektoren erhalten.

Für $a = b$ geht die Gleichung 14) über in:

17) $$\rho = a \operatorname{tg} \nu \cdot \cos 2\varphi.$$

Dies ist die Gleichung eines Vierblattes von 4 gleichen Blättern (vierblättrige Rhodonee).[1])

Um uns eine Vorstellung vom Verlauf der Fußpunktenkurve im Raum zu bilden, betrachten wir auch deren Projektion auf die x z Ebene, die durch die erste und dritte der Gleichungen 16) bestimmt ist.

Für $a = b$ werden diese:

18) $$\begin{aligned} x &= a \operatorname{tg} \nu \cos 2\varphi \cdot \cos \varphi = \rho \cos \varphi \\ z &= a \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Auch diese Kurve läßt sich leicht zeichnen, da die Werte von x als Projektionen der Radienvektoren des Vierblattes auf die x Achse sich ergeben, während die Werte z selbst Radienvektoren eines Vierblattes sind. In Figur 5 sind in dieser Weise diese beiden Projektionen der Fußpunktenkurve, die sich für das Normalenbündel ergibt, gezeichnet.

b) Wird eine der Konstanten a oder b zu Null, so geht Gleichung 11[b]) über in:

$$x^2 (a^2 + z^2) - 2 a x y z + y^2 z^2 = \operatorname{tg}^2 \nu \cdot z^4.$$

Die beiden Brennlinien fallen, wie aus 13[a]) zu ersehen ist, in eine durch den Mittelpunkt des Strahles gehende, den Winkel der beiden Hauptebenen halbierende gerade Linie von der Länge $a \cdot \operatorname{tg} \nu$ zusammen. (Figur 3).

---

[1]) Loria, Ebene Kurven, Seite 304.

Die Achsen der Schnittellipsen mit Ebenen parallel der x y Ebene werden:

$$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \beta\end{matrix}\right\} = \operatorname{tg}\nu\left(\sqrt{z^2+\frac{a^2}{4}} \pm \frac{a}{2}\right).$$

Daher ist: $\alpha \cdot \beta = \operatorname{tg}^2\nu \cdot z^2.$

Der Inhalt dieser Ellipsen wächst also mit dem Quadrate von z und hängt nicht von der Entfernung a der Grenzpunkte des Strahles ab.

Derartige Strahlen kommen bei allgemeinen Geradenkongruenzen als Tangenten der Schnittkurve der beiden Brennflächenmäntel vor, falls diese Tangenten selbst der Kongruenz angehören.[1])

c) Wird sowohl a als b zu Null, so rücken auch die beiden Grenzpunkte in den Mittelpunkt des Strahles und die Fläche gleicher Neigung geht über in den Rotationskegel:[2])

$$x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2\nu \cdot z^2.$$

Der Mittelstrahl wird dann Hauptstrahl genannt. Bei einer Geradenkongruenz treten solche Strahlen auf als Tangenten der Schnittkurve der beiden Brennflächenmäntel in den Durchstoßpunkten derselben mit den Grenzflächen.[3]) Von den Normalen einer Fläche sind die Normalen in den Nabelpunkten der Fläche Strahlen dieser Art.

d) Wird $a = -b$, also $a + b = 0$, so rücken die Grenzpunkte in den Mittelpunkt des Strahles, während die Brennpunkte imaginär werden. Die Fläche gleicher Neigung wird das einschalige Rotations-Hyperboloid:

$$x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2\nu\,(a^2 + z^2).\ ^4).$$

---

[1]) Kummer a. a. O. Seite 224.
[2]) Hensel a. a. O. Seite 297.
[3]) Kummer a. a. O. Seite 296.
[4]) Hensel a. a. O. Seite 296.

Strahlen dieser Art treten bei Geradenkongruenzen auf als Tangenten an die imaginären Brennflächenmäntel durch die Punkte der Schnittkurve der Grenzflächenmäntel.

Die für diese speziellen Lagen auftretenden Fußpunktskurven 14) können alle aus dem Vierblatt konstruiert werden, indem man die Radienvektoren desselben um die Konstante $\frac{a - b}{2}$ vergrößert oder verkleinert (Gleichung 14).

Je nachdem die so erhaltenen Kurven durch den Koordinatenanfangspunkt gehen oder nicht, existieren reelle oder imaginäre Brennpunkte und Brennlinien. Im Falle d) geht diese Kurve in einen Kreis über, wie auch aus der zugehörigen Fläche konstanter Neigung zu ersehen ist.

Ein Paar windschiefer Geraden nennt man rechts- oder linksgewunden, je nachdem es die beiden Schraubenlinien sind, die bestimmt werden, wenn man die eine Gerade als Achse, die andere als Tangente nimmt.[1]) Demnach läßt sich bezüglich der Windung der einem Kongruenzstrahle unendlich benachbarten Strahlen Folgendes sagen:

Die unendlich dünnen Strahlenbündel von Strahlen mit imaginären Brennpunkten enthalten nur Strahlen gleicher Windung gegen den Mittelstrahl, sodaß also alle Erzeugenden der entsprechenden Flächen konstanter Neigung nur aus rechts- oder nur aus linksgewundenen Strahlen bestehen, jene von Strahlen mit zwei reellen Brennpunkten enthalten sowohl Strahlen, welche rechts gegen den Mittelstrahl gewunden sind, als auch solche, welche linksgewunden sind. Die im Falle zweier reeller Brennpunkte auftretenden Brennstrahlen bilden den Uebergang der rechtsgewundenen Strahlen zu den linksgewundenen. Im Falle zusammenrückender Brennpunkte treten zwei Brennstrahlen auf, während alle übrigen Strahlen gleiche Windung gegen den Mittelstrahl haben.

---

[1]) K. Zindler, Liniengeometrie I. Bd., Seite 4.

In den Figuren 1, 2, 3 sind die Flächen gleicher Neigung für zwei reelle, für zusammenfallende und für imaginäre Brennlinien samt ihren Fußpunktenkurven in schiefer Parallelprojektion dargestellt; die mit a a', b b', c c', d d' bezeichneten Erzeugenden sind Brennstrahlen. In der Figur 4 ist die Fußpunktenkurve für zwei reelle Brennlinien, die einen spitzen Winkel einschließen, in Figur 5 für zu einander senkrecht stehende Brennlinien, in Figur 6 für zusammenfallende und in Figur 7 für imaginäre Brennlinien in Grund- und Aufriß gezeichnet. Die vor der x z Ebene verlaufenden Teile derselben sind mit v, jene die hinter der x z Ebene verlaufen, mit h bezeichnet. Die mit H_I, H_{II} bezeichneten Linien sind die zur x y Ebene senkrecht stehenden Hauptebenen, die mit β_I, β_{II} bezeichneten die Brennebenen, bezw. die Projektionen der Brennlinien, B_I, B_{II} die Brennpunkte, G_I, G_{II} die Grenzpunkte, g^1, g^2, g^3, g^4 die Fußpunkte der Abstände in den Grenzpunkten, m^1, m^2, m^3, m^4 jene der Abstände im Mittelpunkt des Strahles.

§ 7. Einhüllende der Projektionen der Erzeugenden der Fläche konstanter Neigung.

Von Interesse ist noch die Kurve, die von den Projektionen auf die Mittelebene des Strahles der ∞^1 Erzeugenden der Fläche konstanter Neigung umhüllt wird, oder was dasselbe ist, der Umriß der Fläche gleicher Neigung auf der x y Ebene. Diese Kurve wird, wie geometrisch leicht zu ersehen, auch erhalten als die Einhüllende der auf den Radienvektoren der Kurven 14) senkrechten Geraden. Die Kurven 14) sind also die Fußpunktskurven der Tangenten der zu untersuchenden Kurven für den Koordinatenanfangspunkt als Pol.

Die Gleichung der Projektionen der Erzeugenden der Fläche 11b) auf die x y Ebene, bezogen auf die Winkelhalbierenden der früheren Achsen als Achsen, wird:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = tg\, \nu \left(\frac{a + b}{2} \sin 2\varphi - \frac{a - b}{2} \right).$$

Aus dieser Gleichung und der aus ihr durch Differentiation nach φ folgenden:

$$- x \sin \varphi + y \cos \varphi = tg\, \nu \cdot (a + b) \cos 2\varphi$$

erhält man durch Auflösen nach x und y die Gleichung der Eingehüllten in Parameterform:

19)
$$x = tg\, \nu \left[(a + b) \sin^3 \varphi - \frac{a - b}{2} \cos \varphi \right]$$
$$y = tg\, \nu \left[(a + b) \cos^3 \varphi - \frac{a - b}{2} \sin \varphi \right].$$

Betrachten wir auch diese Kurven für $\nu = 45^0$. Als Evolute derselben ergibt sich:

19a)
$$\xi = (a + b) \sin \varphi (1 + 2 \cos^2 \varphi)$$
$$\eta = (a + b) \cos \varphi (1 + 2 \sin^2 \varphi).$$

Dies ist die Gleichung der gemeinen Astroide; die Spitzen derselben liegen auf den Winkelhalbierenden des ursprünglichen Koordinatensystems. Für alle Werte von a und b, für welche a + b konstant ist, folgt nur eine Evolute der Kurvenschar 19), mithin sind die Kurven 19) für konstante Werte von a + b die Evolventen der Astroide 19a). Im Falle a = b ergibt sich als Evolvente wieder eine gemeine Astroide. Die Gleichung derselben in Kartesischen Koordinaten

$$x^{2/3} + y^{2/3} = (2a)^{2/3}$$

ergibt sich aus 19) durch Elimination von φ. Diese Kurve tritt auf als Einhüllende der Projektionen auf die x y Ebene der Erzeugenden der Fläche konstanter Neigung für einen

Kongruenzstrahl, der einer Normalenkongruenz angehört. Die ∞^1 Aequidistanten derselben sind identisch mit der durch die Gleichungen 19) für konstante Werte von $a + b$ dargestellten Kurvenschar. Je nach dem Werte von $\frac{a - b}{2}$ entstehen folgende Kurventypen:

Für $\left|\frac{a - b}{2}\right| < \left|\frac{a + b}{2}\right|$ ergibt sich eine schiefe Astroide; wird $\left|\frac{a - b}{2}\right| = \left|\frac{a + b}{2}\right|$, so erhält die Aequidistante einen Berührungsknoten. Die erste dieser Kurven tritt auf bei der Fläche konstanter Neigung mit zwei reellen Brennlinien, die zweite bei jener mit zusammenfallenden Brennlinien.

Wird $^3/_2 \left| a + b \right| > \left|\frac{a - b}{2}\right| > \left|\frac{a + b}{2}\right|$, so treten bei der entsprechenden Aequidistante zwei Knoten und vier Spitzen auf, für $\left|\frac{a - b}{2}\right| = {}^3/_2 \left| a + b \right|$ rücken je zwei Spitzen und ein Knoten in einen Spitzpunkt der Kurve zusammen, für $\left|\frac{a - b}{2}\right| > {}^3/_2 \left| a + b \right|$ treten keine Spitzen mehr auf, die Kurve geht in ein Oval über, das schließlich, wie wir gesehen, auch in einen Kreis ausarten kann.[1])

Sind reelle Tangenten vom Ursprung an diese Kurven vorhanden, so sind dies die Projektionen der für diesen Fall vorhandenen reellen Brennlinien des Kongruenzstrahles. Die wichtigsten Typen dieser Kurven sind mit den Fußpunktskurven für den Koordinatenanfangspunkt als Pol in den Figuren 4, 5, 6, 7 gezeichnet.

---

[1]) Wieleitner, Spezielle ebene Kurven, Seite 113.

B. Strahlen, deren einer Brennpunkt im Unendlichen liegt.

Die Betrachtungen, die wir bisher angestellt haben, bezogen sich auf Kongruenzstrahlen mit endlicher Entfernung der Grenz- und Brennpunkte, also auf sogenannte elliptische, parabolische und hyperbolische Strahlen. Nun soll noch die Umgebung eines Strahles untersucht werden, dessen einer Brennpunkt im Unendlichen liegt. Strahlen dieser Art sind von Zindler[1]) als zylindrische Strahlen bezeichnet worden. Die Gleichungen 13[a]) lassen erkennen, daß die Entfernung der Brennpunkte von einander unendlich groß wird, wenn eine der Konstanten a, b unendlich wird. Dann besteht die erste Näherungskongruenz aus den ∞^2 Geraden, die eine im Endlichen gelegene Gerade und eine unendlich fern gelegene Gerade schneiden. Alle Geraden der Kongruenz sind daher parallel zu der Brennebene des Mittelstrahles, die von diesem und jener Kongruenzgeraden gebildet wird, welche den Mittelstrahl in dem im Endlichen gelegenen Brennpunkte schneidet. Die erste Näherungskongruenz ist also für einen zylindrischen Strahl ein zylindrisches Strahlensystem.[2]) Ordnet man auch diese Strahlen in Regelflächen an, deren Erzeugende gleiche Neigung zum Mittelstrahl haben, so zerfallen diese in zwei sich in der im Endlichen gelegenen, unendlich langen Brennlinie schneidende Ebenen. Dies ist geometrisch leicht einzusehen, läßt sich aber auch aus der Gleichung 11[a]) ableiten, indem erst das Koordinatensystem in Richtung der z Achse in den einen Brennpunkt verschoben und dann $a = \infty$ gesetzt wird. Die der x y Ebene parallelen elliptischen Schnitte der Fläche 11[a]) arten in parallele Geradenpaare aus (vergl. Gleichung 22, 23, 24, 25). Wollen wir also auch für einen zylindrischen Kongruenzstrahl Flächen konstanter Neigung erhalten, welche die zum

---

[1]) K. Zindler, Liniengeometrie II. Bd. § 34.

[2]) Vergl. Zindler a. a. O. § 34 und Berwald a. a. O. § 7.

Strahl senkrechten Ebenen in im Endlichen geschlossenen Kurven schneiden und uns daher genaueren Aufschluß über die Lage der dem Kongruenzstrahle unendlich benachbarten Strahlen geben, so müssen wir in den Gleichungen 1) auch gewisse Glieder zweiter Ordnung in $\xi\,\eta$ mit in Rechnung ziehen, d. h. wir müssen die affine Verwandtschaft zweier Ebenen senkrecht zum Strahl durch eine höhere Punktverwandschaft dieser Ebenen ersetzen.

§ 1. Gleichungen der Näherungskongruenz.

Die Gleichungen 2) stellten in erster Annäherung die ∞^2 einem elliptischen oder hyperbolischen Kongruenzstrahle unendlich benachbarten Strahlen dar. Um nun zu entscheiden, welche Glieder zweiter Ordnung der Entwicklung 1) für den Fall eines unendlich fernen Brennpunktes in Rechnung zu ziehen sind, um eine zweite Näherungskongruenz zu erhalten, untersuchen wir die Veränderungen, welche die Gleichungen 5) erleiden, wenn ein Brennpunkt in das Unendliche rückt. Schreiben wir diese jetzt in der Form:

$$20) \qquad \frac{x-\xi}{\alpha\,\xi+\beta\,\eta} = \frac{y-\eta}{\gamma\,\xi+\alpha\,\eta} = z.$$

Diese Geradenkongruenz, die bei entsprechender Wahl der Konstanten $\alpha\,\beta\,\gamma$ mit der Kongruenz 9) identisch ist, hat zwei in den beiden Ebenen $z_{1,2} = -\frac{1}{\alpha \pm \sqrt{\beta\,\gamma}}$ liegende gerade Linien zu Brennlinien. Die Schnittpunkte derselben mit dem als z Achse eingeführten Mittelstrahl sind die Brennpunkte desselben. Damit einer derselben ins Unendliche fällt, also etwa z_2 unendlich groß wird, muß $\alpha = \sqrt{\beta\,\gamma}$

werden. Die Lage des im Endlichen gelegenen Brennpunktes ist dann bestimmt durch:

$$21) \qquad z_1 = -\frac{1}{2\sqrt{\beta\gamma}} = -\frac{1}{2\alpha};$$

Hiermit werden die Gleichungen 20):

$$22) \qquad \frac{x-\xi}{\sqrt{\beta}(\sqrt{\gamma}\cdot\xi+\sqrt{\beta}\cdot\eta)} = \frac{y-\eta}{\sqrt{\gamma}(\sqrt{\gamma}\cdot\xi+\sqrt{\beta}\cdot\eta)} = z,$$

sodaß:

$$23) \qquad tg^2\nu = (\beta+\gamma)(\sqrt{\gamma}\cdot\xi+\sqrt{\beta}\cdot\eta)^2$$

wird. Die Formel 23) drückt aus, daß die Kurve, die aus den ∞^2 Strahlen die Geraden gleicher Neigung herausfaßt, in zwei gerade Linien zerfällt. Drehen wir nun das Koordinatensystem um die z Achse um den Winkel:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\beta}}{\beta+\gamma},\ \sin\varphi = \frac{-\sqrt{\gamma}}{\beta+\gamma},$$

sodaß also die neue x Achse parallel wird zur Geraden: $\sqrt{\gamma}\cdot\xi+\sqrt{\beta}\cdot\eta = 0$ und führen wir als neue Parameter ξ und η wieder die Koordinaten der Schnittpunkte der Kongruenzstrahlen mit der x y Ebene ein, so gehen die Gleichungen 22) über in:

$$24) \qquad \frac{x-\xi}{(\beta-\gamma)\cdot\eta} = \frac{y-\eta}{2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\eta} = z$$

und der Ausdruck 23) wird:

$$25) \qquad tg^2\nu = (\beta+\gamma)^2\cdot\eta^2.$$

Die Kurve, nach welcher die Fläche gleicher Neigung die x y Ebene schneidet, zerfällt also in zwei parallele Gerade und somit die Fläche in zwei Ebenen, die durch die im Endlichen gelegene Brennlinie hindurch gehen. Um nun eine zweite Näherungskongruenz zu erhalten, müssen wir nach der früheren Entwicklung 1) in den Nennern der Gleichung 24) auch die Glieder zweiter Ordnung in ξ und η

berücksichtigen. Da jedoch in diesen Nennern die linearen Glieder mit ξ fehlen, sind nach der Cramer'schen Regel die Glieder mit ξ^2 gleichwertig mit den Gliedern mit η. Somit erhalten wir für die zweite Näherungskongruenz die Gleichung:

$$26) \qquad \frac{x-\xi}{(\beta-\gamma)\eta+\delta\xi^2} = \frac{y-\eta}{2\sqrt{\beta\gamma}\,\eta+\varepsilon\xi^2} = z.$$

In derselben Weise folgen aus den Gleichungen 9) die Gleichungen der zweiten Näherungskongruenz für hyperbolische, parabolische und elliptische Strahlen zu:

$$\frac{x-\xi}{\frac{\eta}{a}+\alpha\xi^2} = \frac{y-\eta}{\frac{\xi}{b}+\beta\eta^2} = z.$$

Auf die Diskussion dieser zweiten Näherungskongruenz soll jedoch hier nicht eingegangen werden.

Um nun die Ordnung der Kongruenz 26) zu bestimmen, fassen wir x y z als konstant auf und erhalten so zwei quadratische Gleichungen für ξ und η, aus denen jedoch durch Elimination von ξ^2 eine lineare Gleichung zwischen ξ und η folgt. Durch jeden Punkt des Raumes gehen also zwei Gerade und die Kongruenz 26) ist somit von der zweiten Ordnung.

Bestimmen wir auch die Anzahl der in der beliebigen Ebene $x+py+qz+r=0$ liegenden Geraden der Kongruenz. Jede Ebene, die durch eine Gerade $\xi\,\eta$ der Kongruenz 26) hindurch geht, hat die Gleichung:

$$\frac{x-\xi}{(\beta-\gamma)\eta+\delta\xi^2} - z - \lambda\left(\frac{y-\eta}{2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\eta+\varepsilon\xi^2} - z\right) = 0.$$

Diese beiden Ebenen sind identisch, wenn ξ, η und λ folgenden Gleichungen genügen:

$$p = -\lambda$$
$$q = -(\beta-\gamma)\eta + \delta\xi^2 + \lambda(2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\eta+\varepsilon\xi^2)$$
$$r = -\xi + \lambda\eta.$$

Da die dritte Gleichung in ξ und η linear ist, liegen somit in jeder Ebene zwei Strahlen und die Kongruenz 26) ist daher auch von der zweiten Klasse.

§ 2. Gleichung der Brennfläche der Kongruenz 26.

Die Brennflächen der Kongruenzen zweiter Ordnung und zweiter Klasse sind nach Kummer[1]) von der vierten Ordnung. Eliminieren wir die Parameter $\xi\,\eta$ aus den aus 26) folgenden Gleichungen:

$$\Phi \equiv x - \xi - z\left((\beta - \gamma)\,\eta + \delta\,\xi^2\right) = 0$$
$$\Psi \equiv y - \eta - z\left(2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\eta + \varepsilon\,\xi^2\right) = 0$$

und aus der für die Punkte der Brennfläche geltenden Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\eta} - \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} = 0,$$

so erhalten wir als Brennfläche folgende Linienfläche vierter Ordnung:

$$27)\qquad x\,(1 + 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot z) - (\beta - \gamma)\,y\,z - \frac{(1 + 2\sqrt{\beta\gamma}\,z)^2}{4\,z\left[(\beta - \gamma)\,\varepsilon\,z - 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\delta\,z - \delta\right]} = 0.$$

Alle Erzeugenden dieser Regelfläche sind also parallel zur x y Ebene und schneiden daher die unendlich ferne Gerade derselben. Diese ist daher dreifache Gerade der Brennfläche.[2])

[1]) Kummer, Ueber die algebraischen Strahlensysteme, Berl. Abhdlg. 1866.

[2]) In Kummer's Abhdlg. v. J. 1866 ist eine Kongruenz zweiter Ordnung, zweiter Klasse, deren Brennfläche in eine Regelfläche vierter Ordnung mit zwei Doppelgeraden ausartet, behandelt.

In R. Sturm, Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie, Bd. II. 1893, ist dieser Fall auf Seite 203 angeführt und erweitert. Der spezielle Fall, daß die Brennfläche einer Kongruenz zweiter Ordnung, zweiter Klasse eine Regelfläche vierter Ordnung mit einer dreifachen Geraden wird, ist in keiner dieser Abhandlungen erwähnt.

Bestimmen wir nun die Koordinaten der Berührungspunkte eines Kongruenzstrahles mit der Brennfläche, indem wir die aus den Gleichungen 26) für x und y sich ergebenden Werte in Gleichung 27) einsetzen. Dann ergibt sich für die z Koordinate des Schnittpunktes eine Gleichung vierten Grades, die in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\left[2\,\xi\,z^2\left((\beta-\gamma)\,\varepsilon-2\,\delta\sqrt{\beta\,\gamma}\right)-2\,z\left(\delta\,\xi+\sqrt{\beta\,\gamma}\right)-1\right]^2=0.$$

Jeder Kongruenzstrahl berührt also die Brennfläche in zwei Punkten und diese ist daher eine nicht zerfallende Fläche. Da η in dieser quadratischen Gleichung für z nicht vorkommt, berühren alle Strahlen, die durch die Punkte einer Geraden $\xi =$ konstant der x y Ebene gehen, die Brennfläche in Punkten mit konstanter z Koordinate und folglich längs der geraden Linien, nach welchen die Brennfläche durch die Ebenen z = konstant geschnitten wird. Die Regelfläche, die von den durch die ∞^1 Punkte der Geraden $\xi =$ konstant der x y Ebene gehenden Strahlen gebildet wird, enthält also außer $\xi =$ konstant noch zwei zur x y Ebene parallele Gerade und ist somit ein hyperbolisches Paraboloid. Die ∞^2 Strahlen der Kongruenz 26) sind also identisch mit den Erzeugenden einer Schar von hyperbolischen Paraboloiden.

Ist speziell $\beta = \gamma$, so hat die eben betrachtete quadratische Gleichung für die z Koordinate der Berührungspunkte der Brennfläche die Wurzeln:

$$z_1 = -\frac{1}{2\,\beta},\quad z_2 = -\frac{1}{2\,\delta\,\xi},$$

und die Brennfläche 27) zerfällt in den hyperbolischen

27a) { Zylinder: $x \cdot z = -\frac{1}{4\,\delta}$

und eine in der Ebene: $z = -\frac{1}{2\,\beta}$ liegende Brennkurve..

Um nun die Gleichung dieser Brennkurve zu erhalten, fassen wir diejenigen Kongruenzstrahlen, die durch die Punkte der in der x y Ebene liegenden Geraden: $\eta = m\,\xi$ gehen, zu Regelflächen zusammen, und untersuchen die Schnittkurven derselben mit der durch den Brennpunkt des Mittelstrahles gehenden Ebene:

$$z = -\frac{1}{2\sqrt{\beta\gamma}}.$$

Jedem Werte von m entspricht in dieser Ebene die Parabel:

$$28)\quad x^2 - 2\frac{\delta}{\varepsilon}x\,y + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 y^2 + \frac{\left(2\sqrt{\beta\gamma} - (\beta-\gamma)\,m\right)^2}{2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\varepsilon}\,y = 0.$$

Alle diese Parabeln berühren somit im Brennpunkte des Strahles die x z Ebene. Die Richtung der Parabelachse ist für alle Werte von m konstant und gleich $\frac{\varepsilon}{\delta}$. Wird $\beta = \gamma$, so entspricht, wie aus 28) zu ersehen ist, jeder Geraden $\eta = m\,\xi$ die Parabel:

$$29)\qquad x^2 - 2\frac{\delta}{\varepsilon}x\,y + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2 y^2 + \frac{2\,\beta}{\varepsilon}\,y = 0.$$

Diese Parabel wird also von allen Kongruenzstrahlen 26) für den Fall, daß $\beta = \gamma$ ist, getroffen und ist somit Brennkurve. Die Kongruenz 26) besteht daher aus ∞^2 von den Punkten dieser Parabel aus an den hyperbolischen Zylinder $x \cdot z = -\frac{1}{4\,\delta}$ gezogenen Tangenten.

Das vollständige System aller von den Punkten dieser Parabel an den hyperbolischen Zylinder gezogenen Tangenten ist ein Strahlensystem 4. Ordnung, das in die Kongruenz 26) und eine weitere Kongruenz zweiter Ordnung zerfällt.[1])

[1]) R. Sturm a. a. O. Die Strahlenkongruenzen mit singulären Linien: III. Seite 335.

§ 3. Diskussion der Brennfläche.

Der Abstand vom Koordinatenanfangspunkt der Projektion der Erzeugenden der Brennfläche auf die x y Ebene ergibt sich zu:

$$\rho = \frac{(1 + 2\sqrt{\beta\gamma}\, z)^2}{4z\left(\varepsilon(\beta-\gamma)z - 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\delta z - \delta\right)\sqrt{(\beta-\gamma)^2 z^2 + (1+2\sqrt{\beta\gamma}\, z)^2}}.$$

Der Winkel φ desselben mit der $\overset{+}{x}$ Achse folgt aus:

$$\cos\varphi = \frac{1 + 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot z}{\sqrt{(\beta-\gamma)^2 z^2 + (1 + 2\sqrt{\beta\gamma}\, z)^2}},$$

$$\sin\varphi = -\frac{(\beta-\gamma)z}{\sqrt{(\beta-\gamma)^2 z^2 + (1 + 2\sqrt{\beta\gamma}\, z)^2}},$$

also: $\operatorname{tg}\varphi = -\dfrac{(\beta-\gamma)z}{1 + 2\sqrt{\beta\gamma}\, z}$; $z = -\dfrac{\operatorname{tg}\varphi}{(\beta-\gamma) + 2\sqrt{\beta\gamma}\operatorname{tg}\varphi}$.

Führen wir in obige Gleichung für ρ statt des Parameters z den Parameter φ ein, so erhalten wir die Polargleichung der Kurve, die von den Projektionen auf die x y Ebene aller Fußpunkte der Abstände gebildet wird, in der Form:

$$\rho = \frac{\cos\varphi\,(\beta - \gamma + 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot\operatorname{tg}\varphi)}{4\operatorname{tg}\varphi\,(\delta + \varepsilon\operatorname{tg}\varphi)}.$$

Mithin wird die Gleichung dieser Kurve in Cartesischen Koordinaten:

30) $\quad 4y(\delta x + \varepsilon y)(x^2 + y^2) = x^2\left((\beta-\gamma)x + 2\sqrt{\beta\gamma}\, y\right).$

Die Kurve ist daher von der vierten Ordnung. Sie hat im Koordinatenanfangspunkt einen dreifachen Punkt. Die y Achse ist Spitzentangente und die Gerade: $(\beta-\gamma)\cdot x + 2\sqrt{\beta\gamma}\cdot y = 0$ Tangente an den andern durch den Ursprung laufenden Zweig derselben.

Die Geraden:

$$y = \frac{\beta - \gamma}{4\,\delta} \text{ und } y = -\frac{\delta}{\xi}\,x + \frac{\varepsilon\,(2\sqrt{\beta\,\gamma}\cdot\delta - (\beta - \gamma)\,\varepsilon)}{4\,\delta\,(\delta^2 + \varepsilon^2)}$$

sind Asymptoten der Kurve.

Die Brennfläche 27) berührt den Kongruenzstrahl in den beiden Brennpunkten. Da wir nur zum Kongruenzstrahl unendlich benachbarte Strahlen betrachten wollen, ist für unsere Zwecke nur das Verhalten der Brennfläche in der Umgebung der Brennpunkte maßgebend. Dasselbe ist karakterisiert durch den Verlauf der Kurve 30) in der Umgebung des Koordinatenanfangspunktes. Die dort auftretende Spitze entspricht dem Verhalten der Brennfläche in der Umgebung des im Endlichen gelegenen Brennpunktes. Entwickeln wir in diesem Punkte die Gleichung 27) nach der Taylor'schen Reihe, so erhalten wir bei Berücksichtigung der Glieder erster und zweiter Ordnung folgende Gleichung:

$$31)\quad \frac{(\beta - \gamma)\,\varepsilon}{2\sqrt{\beta\,\gamma}}\,x\,z - \frac{3\,(\beta - \gamma)^2\,\varepsilon - (\beta - \gamma)\,2\sqrt{\beta\,\gamma}\cdot\delta}{4\,\beta\,\gamma}\,y\,z + \frac{(\beta - \gamma)^2\,\varepsilon}{(2\sqrt{\beta\,\gamma})^3}\,y - \beta\,\gamma\,z^2 = 0.$$

Dieses hyperbolische Paraboloid stellt also den Verlauf der Brennfläche in dem im Endlichen gelegenen Brennpunkte dar. Die Brennfläche hat in diesem Punkte mithin die Ebene $y = 0$ zur Tangentialebene.

Die Fußpunkte der Senkrechten vom Koordinatenanfangspunkt auf die Projektionen der Erzeugenden der Fläche 31) erzeugen den Zweig mit der Spitze der Kurve 30.

Der Verlauf der Brennfläche in der Umgebung des im Unendlichen gelegenen Brennpunktes wird dargestellt durch die Glieder höchster Ordnung der Gleichung 27), also durch:

$$32)\quad \begin{aligned} &2\sqrt{\beta\,\gamma}\left((\beta - \gamma)\,\varepsilon - 2\sqrt{\beta\,\gamma}\cdot\delta\right)x\,z - \\ &- (\beta - \gamma)\left((\beta - \gamma)\,\varepsilon - 2\sqrt{\beta\,\gamma}\cdot\delta\right)y\,z + \\ &+ \left((\beta - \gamma)\,\varepsilon - 4\sqrt{\beta\,\gamma}\cdot\delta\right)x + (\beta - \gamma)\,\delta\,y = 0. \end{aligned}$$

Mithin sind die einem Kongruenzstrahle mit unendlich fernem Brennpunkt unendlich benachbarten Strahlen gemeinsame Tangenten der durch 31) und 32) dargestellten Flächen zweiten Grades.

---

§ 4. Flächen konstanter Neigung.

Die Kongruenz 26) ist das endlich erweitert gedachte Bild der einem Kongruenzstrahle, dessen einer Brennpunkt im Unendlichen liegt, unendlich benachbarten Strahlen. Fassen wir nun auch hier die Strahlen, welche gegen den Mittelstrahl gleiche Neigung haben, zu Flächen zusammen. Die unendlich kleine Kurve der x y Ebene, durch deren Punkte die Strahlen gleicher Neigung gehen, hat nach 26) die Gleichung:

$$33)\quad \operatorname{tg}^2\nu = (\beta+\gamma)^2\eta^2 + 2\eta_1\xi^2\left[\delta(\beta-\gamma) + 2\varepsilon\sqrt{\beta\gamma}\right] + (\delta^2+\varepsilon^2)\xi^4.$$

Diese Kurve 4. Ordnung hat die Gestalt der Kurve $\varkappa_1$ der Figur 9. Horizontale Tangenten ergeben sich für:

$$\xi^2 = \frac{\varepsilon \operatorname{tg}\nu}{\delta\sqrt{\delta^2+\varepsilon^2}};\quad \eta = -\frac{\operatorname{tg}\nu\sqrt{\varepsilon^2+\delta^2}}{2\beta\delta};$$

vertikale für:

$$\xi^2 = \frac{\operatorname{tg}\nu}{\delta};\quad \eta = -\frac{\varepsilon\operatorname{tg}\nu}{2\beta\delta}.$$

Da $\operatorname{tg}\nu$ eine unendlich kleine Größe ist, sind die Abschnitte der Kurve auf den Koordinatenachsen Größen verschiedener Ordnung. Durch Elimination von ξ und η aus den Gleichungen 26) und 33) wird die Gleichung der Fläche konstanter Neigung erhalten. Wir wollen nur deren Schnitte parallel der x y Ebene untersuchen.

Denkt man sich diese ∞^1 Kurven samt den Erzeugenden der Fläche auf die x y Ebene projiziert, so erhalten wir in dieser eine Schar von Geraden und eine Kurvenschar. Sind

zwei dieser Kurven bestimmt, so beschreibt bei der Bewegung der Endpunkte einer Strecke konstanter Länge auf diesen Kurven jeder Punkt der Strecke eine der übrigen Kurven, da die Erzeugenden der Fläche gleiche Neigung zur z Achse haben und mithin auch die Projektion auf die x y Ebene des Stückes einer Erzeugenden zwischen den Projektionen dieser Kurven konstante Länge hat. Zum Studium der gestaltlichen Verhältnisse der Fläche genügt also die Diskussion von zweien dieser Kurven. Betrachten wir nur den Fall $\beta = \gamma$. Wir wählen als die eine Kurve den Schnitt der Fläche mit der x y Ebene, also die Kurve 33), als zweite die für diesen Fall auftretende Brennlinie 29). Da wir nur unendlich benachbarte Strahlen betrachten wollen, können wir nach der Cramer'schen Regel statt der Parabel 29) auch die zur y Achse symetrische Parabel $x^2 + 2\frac{\sqrt{\beta\gamma}}{\varepsilon} y = 0$ benützen. Dies ist die in der Figur 9 gezeichnete Kurve $\varkappa_2$.

Die Länge der bewegten Strecke ergibt sich aus der Entfernung $-\frac{1}{2\beta}$ des Brennpunktes von der x y Ebene und dem Winkel ν des Strahles mit der z Achse zu:

$$t = -\frac{1}{2\beta} \cdot \operatorname{tg} \nu.$$

Hienach konnten die übrigen Schnitte $\varkappa'$ der endlichen Werten ν entsprechenden Flächen konstanter Neigung in Figur 9 gezeichnet werden.

Fragen wir uns noch, wann die Kongruenz 26) in ein Normalensystem übergeht. In diesem Falle müssen die Ausdrücke im Nenner der Gl. 26 die partiellen Ableitungen einer Funktion von ξ und η sein d. h. der Ausdruck:

$$\left[(\beta - \gamma)\eta + \delta\xi^2\right] d\xi + \left[2\sqrt{\beta\gamma} \cdot \eta + \varepsilon\xi^2\right] d\eta = 0$$

muß ein vollständiges Differential sein. Dies ist nur möglich, wenn $\beta = \gamma$ und $\varepsilon = 0$ ist.

Dann sind also die ∞^2 dem Kongruenzstrahle unendlich benachbarten Strahlen identisch mit den der z Achse unendlich nahen Normalen der Fläche:

$$-\zeta = \beta\,\eta^2 + \frac{\delta}{3}\,\xi^3.$$

Die auf der z Achse liegenden Hauptkrümmungsmittelpunkte sind die Krümmungszentren der Kurven

$$-\zeta = \beta\,\eta^2, \text{ bezw. } -\zeta = \frac{\delta}{3}\,\xi^3.$$

Letztere hat im Ursprung einen Wendepunkt, der Krümmungsmittelpunkt fällt somit ins Unendliche; jener der ersteren liegt im Abstande $z = -\frac{1}{2\beta}$ in Uebereinstimmung mit den früheren Formeln für die Lage der Brennpunkte.

Die für den vorigen Fall parabolische Brennlinie 29) geht jetzt über in die Doppelgerade $y^2 = 0$; die Gleichung der Schnittkurve der Fläche gleicher Neigung mit der x y Ebene wird nach 33):

$$\mathrm{tg}^2\,\nu = (\delta\,\xi^2)^2 + (2\,\beta\,\eta)^2.$$

Mittels dieser zur ξ und η Achse symetrischen Kurve $\varkappa_1$ der Figur 8 und der Geraden $y = 0$ konnten die übrigen Schnitte der Fläche gleicher Neigung parallel der x y Ebene durch Bewegung der Strecke von der Länge: $t = -\frac{1}{2\beta} \cdot \mathrm{tg}\,\nu$ in Figur 8 gezeichnet werden. Danach ist auch für diesen Fall die unendlich dünn zu denkende Fläche konstanter Neigung in Figur 10 konstruiert.

Fig.8.

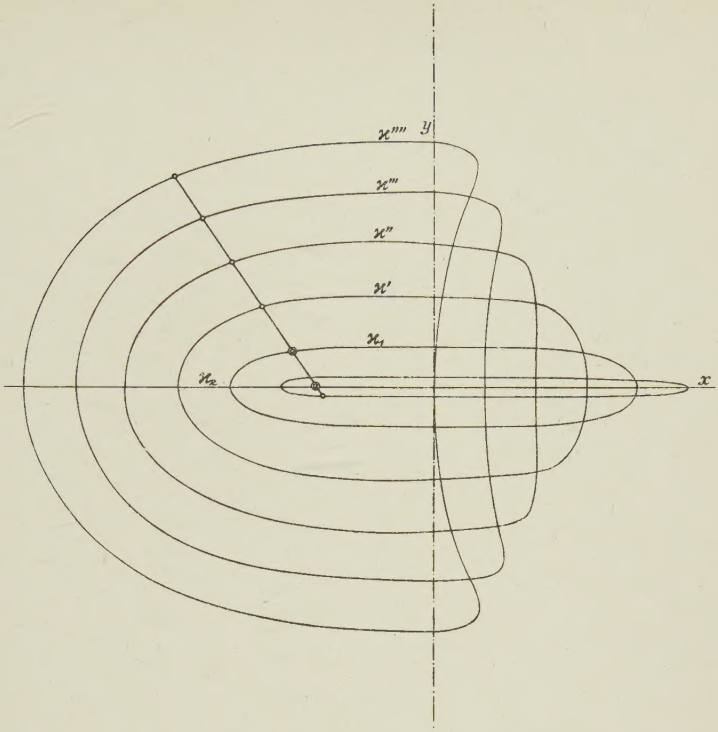
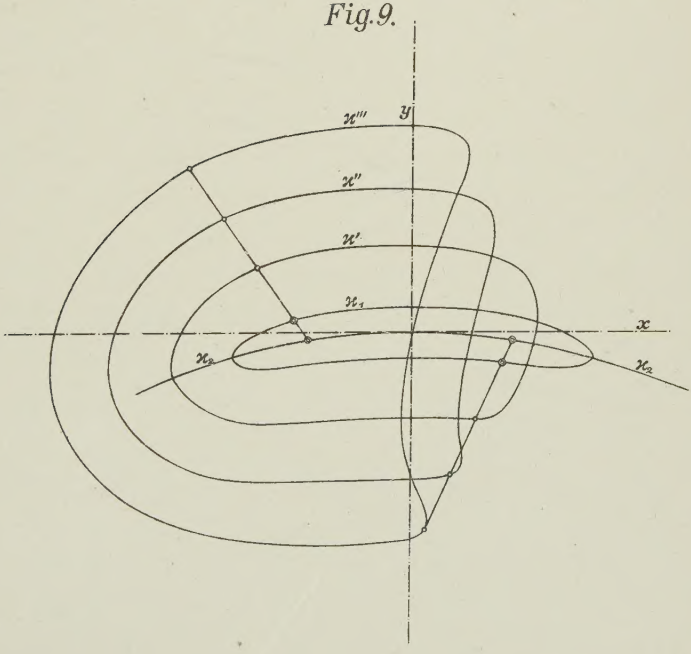


Fig.9.



Lith. Anst v. Hubert Köhler, München. Blüthenstr. 13.